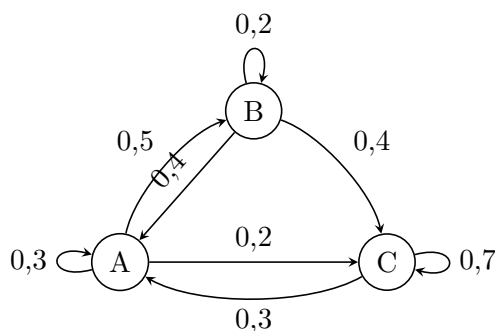


## Übungsblatt 12

### Aufgabe P1 Markovketten via Übergangsgraph.

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände  $A, B, C$  nach  $A, B, C$  eines Automaten vom Zeitschritt  $i - 1$  zum Zeitschritt  $i$  (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit  $i$  werde mit  $X_i$  bezeichnet.



- Man stelle die Übergangsmatrix auf.
- Zur Zeit  $i = 0$  befinde sich das System mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit in den Zuständen  $A, B, C$ :

$$\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0 = A) = 0,3; \mathbb{P}(X_0 = B) = 0,2; \mathbb{P}(X_0 = C) = 0,5).$$

Man Berechne

- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C | X_0 = B),$
- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C),$
- $\mathbb{P}(X_2 = B, X_0 = B).$

**Lösung:** a) Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C | X_0 = B) = p_{BB} \cdot p_{BB} \cdot p_{BC} = 0.016,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C) &= \sum_{Z \in \{A, B, C\}} \mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C | X_0 = Z) \cdot \mathbb{P}(X_0 = Z) \\ &= p_{AB} \cdot p_{BB} \cdot p_{BC} \cdot \pi_A + p_{BB} \cdot p_{BB} \cdot p_{BC} \cdot \pi_B \\ &\quad + p_{CB} \cdot p_{BB} \cdot p_{BC} \cdot \pi_C = 0.0152 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = B, X_0 = B) &= \mathbb{P}(X_2 = B | X_0 = B) \cdot \mathbb{P}(X_0 = B) \\
&= [\mathbb{P}(X_2 = B, X_1 = B | X_0 = B) + \mathbb{P}(X_2 = B, X_1 = A | X_0 = B)] \cdot \mathbb{P}(X_0 = B) \\
&= [p_{BB} \cdot p_{BB} + p_{BA} \cdot p_{AB}] \cdot \pi_B = 0.048 = p_{BB}^2 \cdot \pi_B
\end{aligned}$$


---

### Aufgabe P2 *MK aus fairem Münzwurf.*

Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen. Es sei  $X_n$  der Rest der Augensumme der ersten  $n$  Würfe bei Division durch 4, wobei wir  $X_0 = 0$  setzen.

- a) Zeigen Sie, dass  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.
- b) Angenommen, man hat nach 7 Würfeln eine durch 4 teilbare Augensumme erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach zwei weiteren Würfeln eine Augensumme, die
  - (i) wieder durch 4 teilbar ist,
  - (ii) bei Division durch 4 den Rest 3 liefert,
  - (iii) nicht durch 4 teilbar ist?

---

**Lösung:** a) Zunächst bemerken wir, dass der Zustandsraum  $E = \{0, 1, 2, 3\}$  ist. Man überzeugt sich leicht (Rechenregeln Modulo), dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $X_{n+1} = X_n + R_{n+1} - 4 \lfloor \frac{X_n + R_{n+1}}{4} \rfloor$  (man schreibt oft auch  $X_{n+1} = (X_n + R_{n+1}) \bmod 4$ ), wenn  $R_n$  den Rest der Augenzahl des  $n$ -ten Wurfes bei Division durch 4 bezeichne. Dies impliziert, dass  $X$  eine Markovkette ist. Als Übergangsmatrix erhalten wir

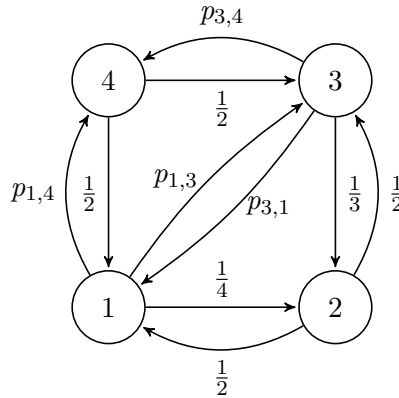
$$P = (p_{ij})_{i,j \in E} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (i) Es ist  $\mathbb{P}(X_9 = 0 | X_7 = 0) = (P^2)_{0,0} = \frac{1}{36}(1 + 2 + 4 + 2) = \frac{1}{4}$ . (ii) Es ist  $\mathbb{P}(X_9 = 3 | X_7 = 0) = (P^2)_{0,3} = \frac{1}{36}(1 + 4 + 4 + 1) = \frac{5}{18}$ . (iii) Es ist mit (i)  $\mathbb{P}(X_9 \neq 0 | X_7 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_9 = 0 | X_7 = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , wobei wir verwendet haben, dass  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  für alle Ereignisse  $B$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

---

### Aufgabe H1 *Unvollständiger Übergangsgraph.*

Gegeben sei der folgende Übergangsgraph einer Markovkette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .



Dabei gelte  $p_{1,3} = p_{1,4}$  und  $p_{3,1} = \frac{1}{2}p_{3,4}$ .

- a) Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und geben Sie die Übergangsmatrix  $P$  zu der Markov-Kette  $X$  an.
- b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn als Startverteilung  $\alpha = \frac{1}{4}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$  vorgegeben ist:
  - (i)  $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = 4)$
  - (ii)  $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3)$
  - (iii)  $\mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1)$
  - (iv)  $\mathbb{P}(X_2 = 4, X_0 = 1)$ .

---

**Lösung:** a) Wegen  $p_{1,3} = p_{1,4}$  und wegen  $\sum_{j=1}^4 p_{1,j} = \frac{1}{4} + 2p_{1,3} = 1$ , gilt  $p_{1,3} = p_{1,4} = \frac{3}{8}$ . Analog erhält man  $3p_{3,1} + \frac{1}{3} = 1$ , also  $p_{3,1} = \frac{2}{9}$  und  $p_{3,4} = \frac{4}{9}$ . [5 Pkt] Damit lautet die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad [5 Pkt]$$

b) Es gilt

$$\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = 4) = p_{4,3}p_{3,2}p_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \quad [1pkt]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3) &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = j) \mathbb{P}(X_0 = j) \\ &= p_{1,3}p_{3,2}p_{2,1}\alpha_1 + p_{2,3}p_{3,2}p_{2,1}\alpha_2 + p_{3,3}p_{3,2}p_{2,1}\alpha_3 + p_{4,3}p_{3,2}p_{2,1}\alpha_4 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{192}, \quad [1.5pkt] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1) &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}(X_2 = 4, X_1 = j | X_0 = 1) = \sum_{j=1}^4 p_{1,j}p_{j,4} \\ &= p_{1,1}p_{1,4} + p_{1,2}p_{2,4} + p_{1,3}p_{3,4} + p_{1,4}p_{4,4} \\ &= 0 + 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} + 0 = \frac{1}{6}, \quad [1.5pkt] \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 4, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1) \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}. \quad [1pkt]$$

---

**Aufgabe H2** *MK via Übergangsmatrix.*

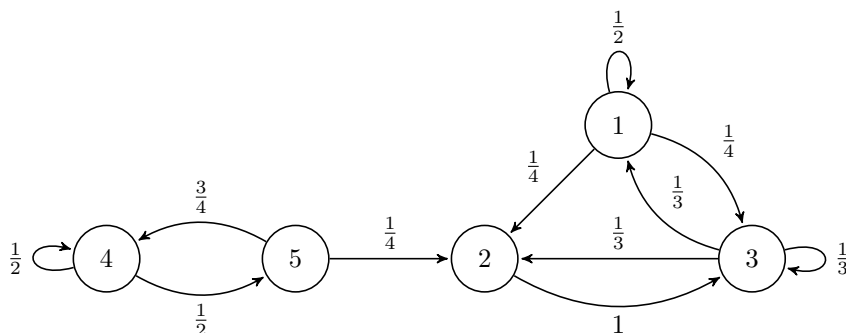
Gegeben sei eine Markov-Kette  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und Übergangsmatrix

$$P = (p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen zu  $X$ .
- b) Beantworten Sie folgenden Fragen mit entsprechender Begründung:
- (i) Gilt  $1 \rightsquigarrow 4$ ,  $5 \rightsquigarrow 1$  und  $5 \rightsquigarrow 5$ ?
  - (ii) Ist  $X$  irreduzibel?
  - (iii) Sind alle Zustände aperiodisch?

---

**Lösung:** a)



- b) (i) Es gilt nicht  $1 \rightsquigarrow 4$ , denn ist man einmal in einem der Zustände 1, 2 oder 3, so ist die Wahrscheinlichkeit 0, wieder zu den Zuständen 4 oder 5 zu gelangen. Es gilt aber  $5 \rightsquigarrow 1$  und  $5 \rightsquigarrow 5$ , denn  $p_{51}^{(3)} > 0$  (d.h. die Wahrscheinlichkeit ist positiv, nach drei Schritten von Zustand 5 nach Zustand 1 zu gelangen) und  $p_{55}^{(2)} > 0$  (d.h. die W'keit ist positiv, nach zwei Schritten zurück zu 5 zu gelangen).
- (ii)  $X$  ist nicht irreduzibel, da z.B. nicht gilt  $1 \rightsquigarrow 4$ . (iii) Es sind alle Zustände aperiodisch, da für alle  $i \in \{1, 3, 4\}$  gilt  $p_{ii}^{(1)} > 0$ , für alle  $j \in \{2, 5\}$  gilt  $p_{jj}^{(3)} > 0$  und für alle  $i \in E$  gilt  $p_{ii}^{(2)} > 0$ .
- 

**Aufgabe H3** *MK aus Urnenmodell.*

Eine Urne enthalte zum Zeitpunkt 0 eine weiße und eine schwarze Kugel. Beim Übergang vom Zeitpunkt  $n$  zu Zeitpunkt  $n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt

ausgewählt, der Urne entnommen und mit einer weiteren Kugel der gezogenen Farbe zurückgelegt. Es sei  $X_n := (X_{n,1}, X_{n,2})$ , wobei  $X_{n,1}$  die Anzahl der weißen und  $X_{n,2}$  die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne nach  $n$  Schritten bezeichnen. Dadurch erhält man eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $E = \mathbb{N}^2$ .

- a) Bestimmen Sie die zugehörigen (1-Schritt-)Übergangswahrscheinlichkeiten.  
b) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\mathbb{P}(X_n = (k, n+2-k)) = \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

---

**Lösung:** a) Aus der Aufgabenstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass man von  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  nur entweder zu  $(i+1, j)$  oder zu  $(i, j+1)$  gelangen kann. **(0,5 P.)** Also  $p_{(i,j)(i+1,j)} = \frac{i}{i+j}$  **(0,5 P.)** und  $p_{(i,j)(i,j+1)} = \frac{j}{i+j}$  **(0,5 P.)** für alle  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind 0. **(0,5 P.)**

b) Wir zeigen dies mittels vollständiger Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  kann nur  $k = 1$  sein und es ist  $\mathbb{P}(X_0 = (1, 1)) = 1$ . **(0,5 P.)** Betrachte nun  $n \rightarrow n+1$ . Ist  $k = n+2$ , so haben wir (wir gehen  $n+1$ -mal nach rechts)  $\mathbb{P}(X_{n+1} = (n+2, 1)) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$ ; analog geht man für  $k = 1$  vor. **(1,5 P.)** Sei nun  $k \in \{2, \dots, n+1\}$ . Dann ist nach Induktionsvoraussetzung und wegen der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n+3-k)) &= \mathbb{P}(X_n = (k, n+2-k)) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n+3-k) | X_n = (k, n+2-k)) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = (k-1, n+2-(k-1))) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n+3-k) | X_n = (k-1, n+2-(k-1))) \quad \textbf{(1 P.)} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{k-1}{n+2} = \frac{n+2-k+k-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} \quad \textbf{(1 P.).} \end{aligned}$$


---

### Aufgabe B1 Stetige Verteilungen.

Gegeben sei die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ein geeignetes  $a > 0$  sei dies die Dichte einer Zufallsvariablen  $X$ .

- (a) Man bestimme  $a$  so, dass  $f_X(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.  
(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ .  
(c) Zeigen Sie  $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$  und  $\text{Var}(X) = \frac{3}{20}$ .

---

### Lösung:

- a) Es muss gelten  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = a \int_0^2 x^2 dx = 1$ , was genau dann der Fall ist, wenn  $a = 3/8$ .  
[2 Punkte]  
b)  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & \text{falls } x \in [0, 2], \\ 1, & \text{falls } x > 2. \end{cases} \quad [2 \text{ Punkte}]$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \dots = \frac{3}{2}, \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \dots = \frac{12}{5}, \\ \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{20}. \quad [2 \text{ Punkte}]\end{aligned}$$

---

### Aufgabe B2 Normalapproximation.

Ein idealer Würfel wird 18.000-mal geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  gebe die Anzahl der geworfenen Sechsen an.

- (a) Berechnen Sie unter Verwendung der Normalapproximation  $\mathbb{P}(2900 \leq X \leq 3050)$ .
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung der Normalapproximation ein  $\Delta \in \mathbb{R}$  so, dass  $\mathbb{P}(3000 - \Delta \leq X \leq 3000 + \Delta) = 0,99$  gilt.

*Hinweis:* Für die Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  der Standardnormalverteilung gilt  $\Phi(1) \approx 0.8413$ ,  $\Phi(2) \approx 0.9772$  und eine bestimmte Symmetrieeigenschaft, mit deren Hilfe die Werte an negativen Stellen ausgerechnet werden können. Es gilt  $\Phi(2.576) \approx 0.995$ .

---

### Lösung:

Normalapproximation mit  $n = 18000$ ,  $\mu := \mathbb{E}[X]/18.000 = 1/6$ ,  $\sigma^2 := \text{Var}(X)/18.000 = 1/6 - 1/36 = 1/6 \cdot (1 - 1/6) = 5/36$ ,  $\sigma = \sqrt{5}/6$ .

- (a)  $n \cdot \mu = 3000$ ,  $\sqrt{n} = \sqrt{20 \cdot 900} = 2 \cdot 30 \cdot \sqrt{5}$ ,  $\sqrt{n} \cdot \sigma = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ . Mit  $Z := (X - n\mu)/(\sqrt{n} \cdot \sigma)$  ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2900 \leq X \leq 3050) &= \mathbb{P}((2900 - 3000)/50 \leq (X - n\mu)/(\sqrt{n} \cdot \sigma) \leq (3050 - 3000)/50) \\ &= \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \approx 0.8413 - (1 - 0.9772) = 0.8185. \quad [3 \text{ Punkte}]\end{aligned}$$

- (b)  $\mathbb{P}(-\Delta/50 \leq Z \leq \Delta/50) = \Phi(\Delta/50) - \Phi(-\Delta/50) = 2\Phi(\Delta/50) - 1$ . Nun können wir  $\Delta/50$  so bestimmen, dass  $\Phi(\Delta/50) = 0.995$  gilt und daraus durch Multiplikation mit 50 das gesuchte  $\Delta$  gewinnen:  $\Delta/50 = \Phi^{-1}(0.995) = z_{.995} \approx 2.576$ . Also  $\Delta = 50 \cdot 2.576 = 128.8$ . [3 Punkte]
- 

Abgabe der Hausübungen: **Mittwoch, 22. Januar, 16:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)